

## Análise Matemática I E

Terceiro Teste (19/12/2012)

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

Pergunta 1

a) Utilizando a substituição  $\sqrt{x} = t$  temos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \arcsin(\sqrt{x}) dx = \int \frac{1}{t} \arcsin(t) 2t dt =$$

$$\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2 \quad = \int 2t \arcsin(t) dt =$$

$$= 2t \arcsin t - \int \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} dt =$$

$$= 2t \arcsin t + 2\sqrt{1-t^2} + e, \text{ com } e \text{ uma constante real,}$$

$$= 2\sqrt{x} \arcsin(\sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x} + e, \text{ com } e \text{ uma constante real.}$$

b) Sabemos que quando  $x=1$  a primitiva que se pretende encontrar toma o valor 4. Assim

$$2\sqrt{1} \arcsin \sqrt{1} + 2\sqrt{1-1} + e = 4 \Leftrightarrow 2 \frac{\pi}{2} + e = 4 \Leftrightarrow e = 4 - \pi$$

A primitiva encontrada é

$$2\sqrt{x} \arcsin(\sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x} + 4 - \pi.$$

### Pergunta 2

Dado que a função integranda é uma função racional, não sendo possível fazer a divisão do polinômio numerador pelo polinômio denominador, comecemos por decompô-la em frações mais simples. Para tal determinaremos os zeros do polinômio denominador:

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$\frac{4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2)}{x(x-2)^2}$$

Logo

$$4 = A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2)$$

Em particular se:

$$x = 0 \Rightarrow 4 = 4A \Leftrightarrow A = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 4 = 2B \Leftrightarrow B = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow 4 = 1 + 2 + C(-1) \Leftrightarrow C = -1$$

Assim,

(3)

$$\int_x^{x+2} \frac{4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx = \int_x^{x+2} \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= \left[ \log x - \frac{2}{x-2} - \log(x-2) \right]_x^{x+2} =$$

$$= \log(x+2) - \frac{2}{x} - \log x - \log x + \frac{2}{x-2} + \log(x-2) =$$

$$= \log(x+2) - \frac{2}{x} - 2 + \frac{2}{x-2} + \log(x-2)$$

### Pergunta 3

Efectuando a substituição  $x^2 = t$  vem:

$$\int_0^1 \frac{x^{2x}}{x^{2x} + 2x^{2x} + 5} dx = \int_1^x \frac{t^x}{t^2 + 2t + 5} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{t}{t^2 + 2t + 5} dt$$

$$x^2 = t \Rightarrow x = \log t$$

$$x=0 \Rightarrow t = x^0 = 1$$

$$x=1 \Rightarrow t = x = 1$$

Atendendo a que não é possível efectuar a divisão do polinómio numerador pelo polinómio denominador e que este último não apresenta raízes reais temas:

(4)

$$\int_1^2 \frac{t}{t^2+2t+5} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2t+2}{t^2+2t+5} dt - \int_1^2 \frac{1}{t^2+2t+5} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \log(t^2+2t+5) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{(t+1)^2+4} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \log(t^2+2t+5) \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1/2}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1} dt =$$

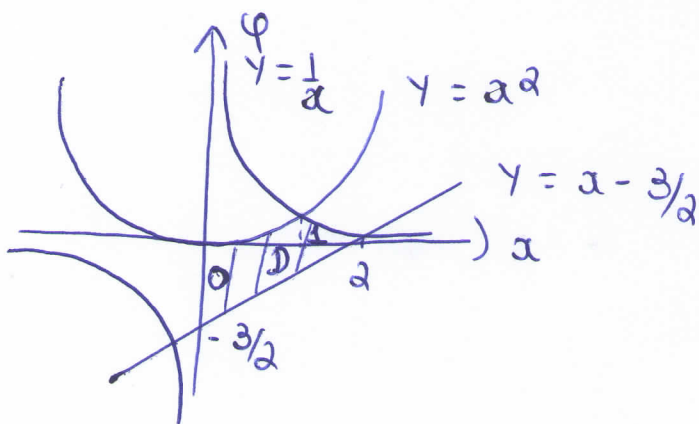
$$= \frac{1}{2} \left[ \log(t^2+2t+5) \right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg}\left(\frac{t+1}{2}\right) \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \log(2^2+2\cdot 2+5) - \frac{1}{2} \log 8 - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2+1}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \frac{1}{2} \log(2^2+2\cdot 2+5) - \frac{1}{2} \log 8 - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2+1}{2}\right) + \frac{\pi}{8}$$

#### Pergunta 4

Comencemos por esboçar o domínio em causa.



$$\text{Área} = \int_0^1 x^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right) dx +$$

$$+ \int_1^2 \frac{1}{x} - \left(x - \frac{3}{2}\right) dx$$

$$\begin{cases} y = x^2 & x^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \\ y = \frac{1}{x} & \Leftrightarrow x^3 = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} & \frac{1}{x} = x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ y = x - \frac{3}{2} & 1 = x^2 - \frac{3}{2}x \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} =$$

$$= \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_0^1 + \left[ \log x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_1^2 = \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \log 2 - 2 + 3 - 0 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \\
 &= \log 2 + \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

### Pergunta 5

Trata-se de uma integral impropria de primeira espécie, uma vez que o domínio de integração é um conjunto ilimitado, mas a função integranda é limitada em qualquer subconjunto limitado contido no domínio de integração. Assim:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1+x^2) \sqrt{\pi + 2 \arctan x}} dx = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \int_{\gamma}^0 \frac{1}{1+x^2} (\pi + 2 \arctan x)^{-1/2} dx =$$

$$= \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} [(\pi + 2 \arctan x)^{1/2}]_{\gamma}^0 =$$

$$= \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \sqrt{\pi + 2 \arctan 0} - \sqrt{\pi + 2 \arctan \gamma} =$$

$$= \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi + 2 \arctan \gamma} = \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi + 2(-\frac{\pi}{2})} = \sqrt{\pi}$$