

Análise Matemática II E

2º Teste, 19 de Junho de 2009

Duração: 2 horas.

Deve mudar de folha sempre que mudar de pergunta. Deve apresentar os seus cálculos, argumentos e justificações. Atenção, existem mais perguntas no verso desta folha.

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^3$.
 - a) Calcule a derivada direccional de f segundo a direcção do vector $\mathbf{u} = (1, 2)$ no ponto $P(-1, 3)$. [2]
 - b) Calcule a derivada direccional de f no mesmo ponto P segundo a direcção de máximo crescimento de f . [2]
2. Considere a função $f(x, y) = 3x^2 + y^2$.
 - a) O gráfico de f é uma superfície em \mathbb{R}^3 . Determine o plano tangente e a recta normal a essa superfície no ponto $(1, -2, 7)$. [2]
 - b) Determine os pontos (x, y) e as direcções em que a derivada direccional de f tem o valor máximo, considerando f restringida à circunferência $x^2 + y^2 = 1$. [4]
Observação: Caso não consiga resolver a alínea b), determine o máximo e o mínimo de $\phi(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. [2]
3. Determine os pontos críticos, e verifique se são máximos ou mínimos relativos ou pontos sela, da função
$$f(x, y) = y^2 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 24. \quad [2]$$

4. Troque a ordem de integração no seguinte integral

$$\int_1^e \int_0^{\log x} x \, dy dx,$$

e calcule-o.

[2]

v.s.f.f.

5. Use coordenadas polares para calcular o seguinte integral:

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx.$$

[2]

6. Calcule o volume dos seguintes sólidos:

- a) o sólido no interior do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ entre os planos $z = 0$ e $z = x$ e em que $x \geq 0$; [2]
- b) o sólido limitado inferiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0$ e superiormente pelo parabolóide $2 - z = x^2 + y^2$. [2]